



УДК 51(091)+007.47

Ю. Т. Глазунов

ГРАФЫ И СИСТЕМЫ. ОВЕЩЕСТВЛЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО

Развитие теории графов привело к появлению абстрактной математической дисциплины. По прошествии времени, однако, граф как основной объект исследований в этой теории стал необходимым инструментом анализа и конструирования разнообразных систем.

132

The short outline of the establishment and development of the graphs' theory and the general theory of systems is stated. It was shown that graphs are the natural and structural models of systems.

Ключевые слова: система, элемент, модель, граф, структура, организация, тенденции развития, отношения, связь.

Key words: system, element, model, graph, structure, organization, development trends, relations, communication.

Введение

В 1736 г. Кёнигсбергский университет предложил задачу, которая вошла в историю науки как *задача о кёнигсбергских мостах* и одновременно как причина появления совершенно новой области математики — *теории графов*. Сформулирована она была весьма просто: «Можно ли пройти через каждый из семи мостов Кёнигсберга единственный раз и в конце пути вернуться домой?» В качестве места жительства можно было выбрать любую часть города. Эта задача в науке сыграла такую же роль, как и задача о брахистохроне, поставленная в 1696 г. Иоганном Бернулли: последняя привела к возникновению вариационного исчисления [1, с. 13], первая же — теории графов. А обе эти науки в наше время относятся к основам прикладной математики.

Каково же начало этой интересной истории?

На побережье Балтики между Вислой и Прегелем жил некогда самостоятельный народ, называвшийся пруссами, который, будучи отделенным от остальной Европы морем, лесом и реками, долгое время сохранял свою независимость и своеобразный характер, его основными чертами были любовь к свободе и язычество. У этого народа был великий жрец, которого называли Криве. Он имел над своими людьми неограниченную власть, причем правил как живыми, так и мертвыми. Последние, отходя в страну своих предков, по дороге «посещали» его жилище. Поэтому-то их родственники постоянно расспрашивали жреца о дальнейшей судьбе умерших. Он же отвечал без колебаний и описывал все, что видел: во что они были одеты, какое имели настроение, рассказывал о сожженных вместе с ними конях и слугах и даже показывал большую дыру, которую оставил вчера своим копьем на память в



его потолке счастливый путешественник в иной мир [2, с. 29]. Благодаря этому авторитет вождя таинственного племени был громадным.

Этот народ в 997 г. пражский епископ Адальберт попытался обратить в христианство. На его предложения пруссы отвечали, что они уже имеют своего Криве, весьма им довольны и в чужом не нуждаются. Епископ, однако, настаивал, что и привело его к гибели в лесу, расположенном в пятнадцати километрах от нынешнего Эльблонга (Польша).

После убийства пруссами Адальберта имя этого народа стало известно во всей Европе. Сохранение независимости и своей веры в этой ситуации было для них уже невозможно. «Дорога недалеко, а добыча богата» — призывали глашатаи новых крестовых походов. Со стороны польского князя Конрада Мазовецкого прозвучала просьба о помощи в покорении пруссов. Его княжество было ближайшим к их территории, и он собирался направить туда свое крестоносное войско.

Призыв был услышан Великим магистром ордена святой Марии Тевтонской Германом фон Зальца. Орден объединял в основном безземельных рыцарей немецкой крови, которые мечтали о создании где-нибудь собственного государства. Сам же фон Зальца считался политиком весьма хитрым. Вместо того чтобы служить Конраду, он заручился поддержкой европейских авторитетов — императора Священной Римской империи Фридриха II и римского папы, а также получил их позволение на взятие всей прусской земли в ничем не ограниченную собственность.

Страшная война пруссов с крестоносцами началась в 1230 г. и длилась 53 года. Продвигаясь вдоль Балтийского моря на восток, на отвоеванных землях рыцари закладывали замки, брать которые пруссы так и не научились.

Именно так в 1255 г. на небольшой возвышенности над рекой Прегель был заложен замок Кёнигсберг, названный так в честь богемского короля Оттокара II, участвовавшего в колонизации пруссов. В месте строительства замка река дважды разделялась на два рукава, благодаря чему напротив замка оказались два острова — Кнайпхоф и Ломзе. Как это было обычно в Средневековье, вокруг замка появились поселения, превратившиеся со временем в небольшие городки, долгое время сохранявшие самостоятельность. Важнейшими из них стали Альтштадт, Кнайпхоф, Ломзе и Форштадт (рис. 1). Они были расположены на берегах реки и островах, что требовало возведения соединяющих их мостов (рис. 2—8), а это и поспособствовало позднее созданию новой математической теории.

После секуляризации Пруссии последний Великий магистр тевтонского ордена и первый прусский герцог Альбрехт Гогенцоллерн уже не мог обходиться без образованных людей. Для их подготовки 17.09.1544 г. он провозгласил открытие Кёнигсбергского университета (рис. 9, 10). Факт, что именно университет выступил с предложением решения поставленной выше задачи, удивлять нас не должен. В нем работало множество знаменитых в то время математиков и физиков [3, с. 42].

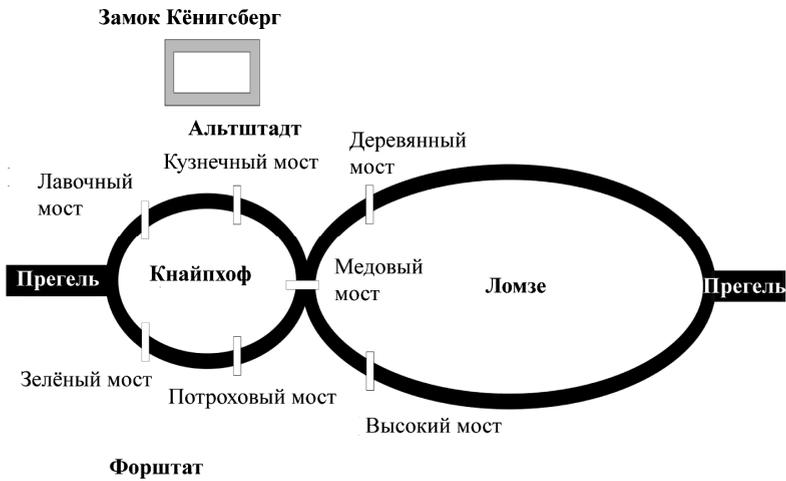


Рис. 1. Расположение города Кёнигсберг в момент формулировки задачи о кёнигсбергских мостах



Рис. 2. Лавочный мост, 1281 г. (Krämerbrücke).
Это был первый мост, построенный в Кенигсберге жителями Альтштадта для связи с Кнайпхофом. Старый деревянный мост позднее заменили металлическим

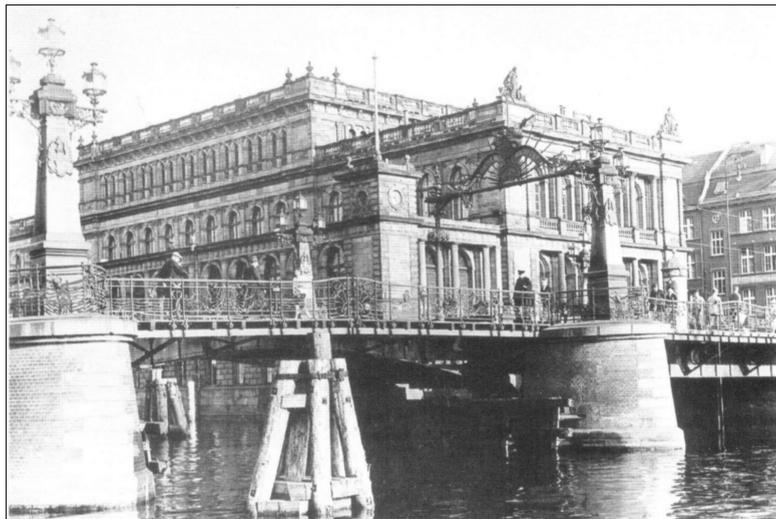


Рис. 3. Зеленый мост, 1322 г. (Grüne Brücke).

Этот мост связал замок Кёнигсберг через Старый Прегель с предместьем Понарт. В 1582 г. мост сгорел, однако в 1590 г. его построили заново, и вновь из дерева.

Только в 1907 г. деревянная конструкция моста была заменена металлической

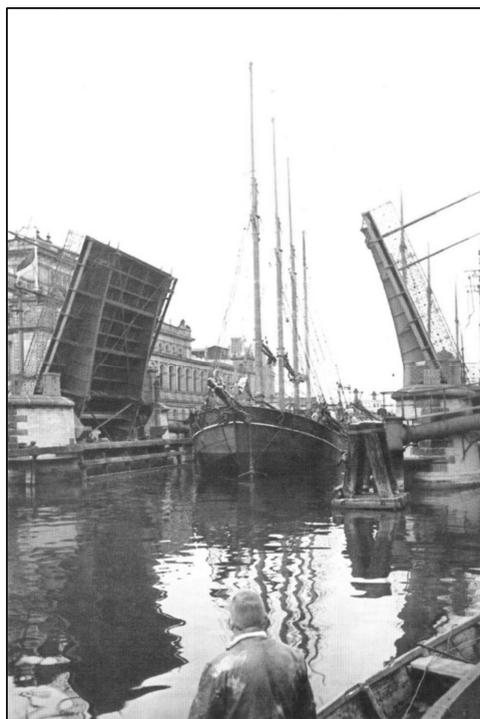


Рис. 4. Потроховый мост, 1377 г. (Köttel Brücke). Параллельно Зеленому мосту жители Кнайпхофа построили Потроховый мост.

Свое название он получил от расположенной поблизости бойни.

В 1886 г. деревянный мост заменили металлическим



Рис. 5. Кузнецкий мост, 1379 г. (Schmiedebrücke).

Этот мост соединил два средневековых города — Альтштадт и Кнайпхоф.

Поскольку он был расположен в весьма удобном месте, то от частого использования уже до 1787 г. мост практически «износился».

Его отстроили заново, и вновь из дерева.

Металлическим мостом заменили его только в 1896 г.



Рис. 6. Деревянный мост, 1404 г. (Holzbrücke).

Мост соединил Альтштадт и Ломзе через Новый Прегель.

Построили его параллельно Лавочному и Кузнецкому мостам.

Только по прошествии 500 лет в 1904 г. деревянную конструкцию моста заменили металлической



137

Рис. 7. Высокий мост, 1500 – 1520 гг. (Hohe Brücke).
В 1882 г. деревянные составляющие моста заменили металлическими,
а в 1937 г. рядом со старой конструкцией был построен новый мост

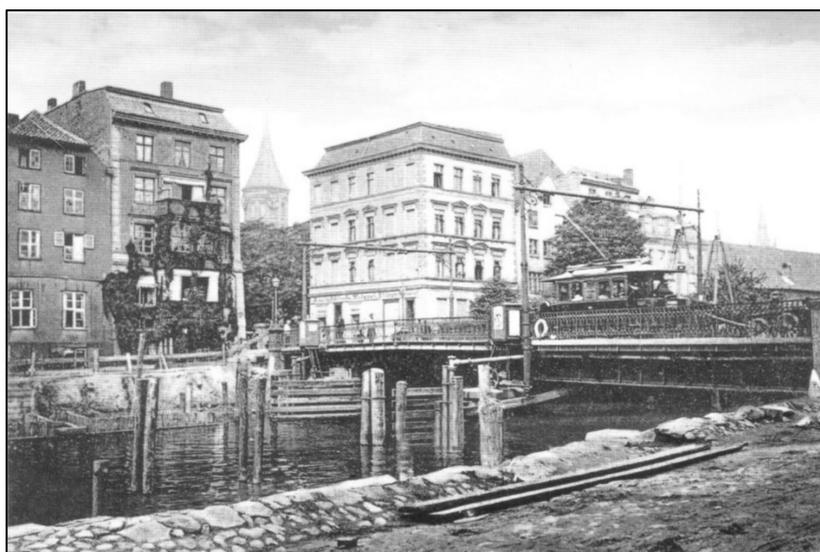


Рис. 8. Медовый мост, 1542 г. (Hönigbrücke).
Это последний из семи знаменитых мостов Кёнигсберга.
Он связал два острова — Кнайпхоф и Ломзе.
Был построен для улучшения доступа к центральному Домскому собору
(его башня виднеется в промежутке между двумя домами на противоположном
берегу реки) и организуемому в Кнайпхофе университету.
Своим названием мост обязан взятке в виде бочки меда за разрешение
на строительство моста, которую получил прусский обербургграф
от совета Кнайпхофа. С этого времени жители Альтштадта называли
жителей Кнайпхофа «медовыми подлизями»



Рис. 9. Старое здание
Кёнигсбергского университета
на острове Кнайпхоф

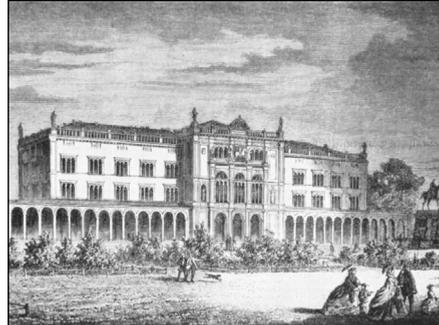


Рис. 10. Новое здание Кёнигсбергского
университета, расположенное
к северу от замка (1862 г.)

1. Появление теории графов

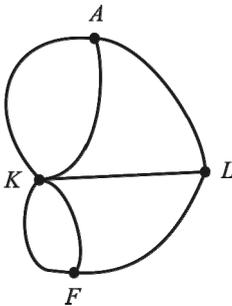


Рис. 11. Неориентированный граф,
представленный Леонардом Эйлером
для исследования задачи
о кёнигсбергских мостах

Простота доказательства вызвала среди математиков заинтересованность. Такого рода рисунки (рис. 11) называли *графами* и стали исследовать их как самостоятельные математические объекты. Каждый граф G состоит из двух конечных множеств: множества V элементов, называемых вершинами, и множества дуг E , соединяющих эти вершины, то есть $G = (V, E)$.

Как это бывает в традиционной математике, теория графов развивалась исключительно по законам дедукции. Придумывались все новые графы: ациклические, простые, ориентированные, полные, двудольные, односвязные и даже дендриты, деревья и леса. Вставляли все новые задачи, формулировались алгоритмы их решения: задача раскраски графа, нахождения на графе кратчайшего или длиннейшего пути, нумерации его вершин и т. д. Задачи создавали все новые проблемы: планирование пути в смешанном графе, нахождение критического пути и даже проблемы деревенского и китайского почтальонов.

Теория развивалась, но оставалась исключительно теорией, не воплощенной в реальной действительности. Дедуктивная логика способствует внутреннему развитию математики, однако не служит использованию получаемых результатов (важны они сами, а не их интерпретация).

Задачей о кёнигсбергских мостах заинтересовался молодой Леонард Эйлер и быстро доказал отсутствие ее решения. Для этого он использовал своеобразный рисунок, обозначив на нем четыре части города точками, а мосты — соединяющими их кривыми (рис. 11).

Сразу стало ясно, что решение возможно только тогда, когда выбранное место жительства соединяется с соседними частями города четным количеством дуг (нужно не только уйти, но и вернуться).



Такое положение дел сохранялось почти до середины XX столетия.

Многолетние усилия, связанные с интегрированием математики в физику, технику, экономику, биологию и иные науки, привели к выделению в ней и развитию наиболее результативных методов, представляющих в наше время содержание прикладной математики. От традиционной ее отличает иная цель и своеобразный характер действий.

2. Модель как основа прикладной математики

Умозаключения в прикладной математике не столько формальны, сколько рациональны. Точность традиционной математики здесь вообще недостижима, а критериями истинности результатов часто служат интуитивное убеждение и здравый смысл. Однако это не недостаток, а источник особой силы прикладной математики.

Точной границы между этими дисциплинами не существует. Многие разделы чистой математики составляют основы прикладной, а сама прикладная математика является неисчерпаемым источником новых задач и исследований для традиционной. Эту ситуацию еще в 1972 г. хорошо определил основатель научного журнала "Quarterly of Applied Mathematics" Вильям Прагер: «Лучшее, что я могу сделать, — сказал он, — это определить прикладную математику как мост, соединяющий чистую математику с наукой и техникой. Я умышленно определяю этот мост как средство связи между двумя областями деятельности, а не как дорогу, ведущую из одной области в другую, поскольку мост этот позволяет двухстороннее движение. Его значение для науки и техники очевидно, однако не менее важную роль играет он и в чистой математике: без стимулов, вытекающих из применений, была бы она много беднее» [4, с. 25]. Применения выдвигают требования, которые в традиционных математических исследованиях считаются второстепенными.

Основным инструментом в этой процедуре служит *математическая модель* — система, отображающая главные характеристики исследуемого объекта. В зависимости от цели исследований такой условный образ объекта может быть представлен функцией, матрицей, системой уравнений и неравенств, графом и т. д. Вещь эта столь значимая, что можно утверждать, что вся прикладная математика представляет собой науку о создании, анализе, интерпретации и совершенствовании математических моделей. В этом процессе наблюдается широко известное отношение между целью работы и орудием труда: улучшение орудия труда приближает нас к цели, а неудача в достижении цели вызывает совершенствование орудия труда и в конечном счете ведет к повышению результативности работы. В нашем случае цель состоит в познании исследуемого объекта, орудием же служит математическая модель. Она строится так, чтобы выражать черты объекта, наиболее существенные, с точки зрения исследователя: структурные и функциональные особенности, взаимовлияние элементов, независимые и зависимые переменные, связи с окружающей средой и т. д. Это не только инструмент исследования, но и результат научной абстракции.

Практическое значение модель имеет только при том условии, что анализировать ее значительно проще, чем сам объект. Однако, хотя это и



упрощенный образ объекта, он должен сохранять его основные и наиболее важные черты. Вместе с этим при построении модели наблюдатель абстрагируется от несущественных, с его точки зрения, качеств исследуемого объекта. Как это происходит?

Абстракция — необходимое условие каждого исследования, вытекающее из природы нашего мышления. Действительно, познание человеком природы начинается с *ощущений*, т. е. через цвет, запах, вкус, форму и т. д. Далее реализуется оно через *восприятие*. Восприятие дает уже общий образ предмета. Он появляется в результате непосредственного воздействия предмета на человека через его органы чувств (например, образ туманной горы, лежащего на столе письма или включенного компьютера). Восприятие не задерживается в нашем уме слишком долго. То, что от него остается в памяти после непосредственного контакта с предметом, называется *представлением* (например, представление о человеке, пейзаже или предмете, с которыми мы познакомились ранее).

Чувственное восприятие мира дает нам исключительно поверхностное знание, содержащее информацию лишь о внешней стороне предметов. Мы не ограничиваемся этой информацией. Мы стремимся к обобщению представлений, что способствует проникновению в суть вещей, а затем и выявлению законов природы и общества.

В этот момент проявляется и начинает действовать мышление, основная функция которого — абстрагирование. В отличие от чувственного познания мышление выражает внутренний мир вещей в абстракциях. Отрываясь от осязаемых свойств предметов и явлений, мышление в создаваемой им абстракции обобщает множество подобных себе представлений, выделяет важнейшие их черты и существенные отношения между их частями. Таким путем мы приходим к *понятию*, отражающему существенные признаки предметов, то есть то, в чем они схожи или отличаются друг от друга. Именно благодаря абстракции мы узнаем «стол» в предметах, совершенно друг на друга не похожих (например, в слесарном, обеденном или операционном столе).

Подобно понятию, модель также является абстракцией, только приходим мы к ней не путем обобщения, а путем отделения несущественных признаков объекта. Модель можно рассматривать одновременно как результат и инструмент мышления.

Представленную выше абстракцию можно также определить как *идеализацию проблемы*, или, иначе говоря, как ее упрощение. Эта идеализация заключается в отбрасывании всего, что в данном вопросе несущественно, и сохранении в модели только важнейших признаков объекта.

Универсальных правил (а тем более алгоритмов) реализации этой процедуры пока не существует. Все здесь опирается на опыт, интуицию и в некотором смысле напоминает создание художественного произведения. Тем не менее результат идеализации весьма конкретен.

В отличие от формализованных уравнений традиционной математики, с одной стороны, или свободных от логических канонов художественных образов — с другой, модель представляет собой наиболее яркое и даже вещественное воплощение явлений природы. Это означает, что ее можно исследовать, контролировать, а в случае необходимости изменять в направлении наилучшего отображения законов природы.



3. Появление общей теории систем

Другое важное событие, касающееся нашей темы, произошло в 1937 г. в Чикагском университете. Оно хорошо описано А. Кониньским в предисловии к книге [5, с. 5]: «...на философском семинаре профессора Чарльза Морриса венский биолог Людвиг фон Берталанффи впервые представил набросок общей системной концепции. Его предложение столкнулось тогда с достаточно холодным приемом, поскольку было понято как еще одна разновидность метафизических поисков "духа целого", столь мощно укоренившихся в традиционной немецкой философии». В 1972 г., когда Людвиг фон Берталанффи уже был на смертном одре, «системный подход», «системное мышление», «теория систем» представляли «доминирующий аспект и теоретико-методологическую основу современной науки, понимаемой как единство, а не как множество несвязанных между собой дисциплин».

Почему понятие системы так широко распространилось в столь короткое время?

Серьезной предпосылкой для этого стал выступающий в системах *синергический эффект* [6, с. 82], который коротко можно охарактеризовать утверждением, что «целое больше суммы своих частей». Как это может быть? Благодаря внутренней организации интегральное единство приобретает новые свойства, отсутствующие в его составляющих. Под организацией здесь понимается упорядочение отношений и связей элементов множества, составляющего указанное интегральное единство.

В первой половине XX столетия люди все ближе стали подходить к пониманию того, что весь мир представляет единство, а старые методы исследования вырванных из него явлений становятся все менее результативными. Одновременно развивались и методы, предоставляющие возможности исследования такого единства. Появлялось убеждение, что каждую ситуацию следует рассматривать не только интегрально, но и вместе с ее окружением. Что это, в свою очередь, означает?

Действительно, каждый предмет, явление, процесс или ситуация, в которых можно выделить составные части, представляет собой *сложный объект*. Поскольку элементы сложного объекта взаимосвязаны, он, благодаря их взаимодействию, представляет собой нечто самостоятельное, однако существующее во взаимоотношениях с иными сложными объектами. Таким именно путем мы и приходим к понятию системы и другим, важным для нас понятиям.

Система — это совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих между собой элементов. Система находится в единстве со своим окружением и сама служит составным элементом систем высшего уровня. Ее же элементы выступают в качестве систем более низкого уровня.

Представленное выше определение содержит и согласует между собой два важных свойства системы: *единство* (совокупность взаимосвязанных элементов) и *делимость* (каждый элемент системы — тоже система). Благодаря этому из системы можно выделить так называемые *подсистемы*. Это же позволяет в каждом конкретном случае сосредоточить внимание на той системе, которая в данный момент наиболее ин-



тересует исследователя. Система в общем случае — это фирма, город, географический регион, автомобиль, организм животного, разговорный язык или даже совокупность формул.

Понятие *единства, или интегральности*, весьма важно. В теории систем интегральность означает, что все элементы прямо или косвенно зависят друг от друга. Добавление или исключение одного из них изменяет отношение между остальными. Отсюда следует, что любые два подмножества множества элементов системы всегда между собой связаны.

Однако составляющие системы обычно сами являются системами. Следовательно, имея в себе свойства целого, они способны разделяться на слагаемые низшего уровня. Так появляется возможность декомпозиции элементов, благодаря которой проявляется иерархическое представление рассматриваемого целого.

Заметим, что и весь окружающий нас мир — большая система, состоящая из систем, созданных природой и человеком. Будучи подсистемами, они взаимодействуют. Возможностью исследования окружающей действительности мы обязаны именно свойству делимости. Выделяя из общего интересующее нас явление, процесс или объект, мы делаем его отдельной и более простой для исследования системой. Этим путем человечество в прошлом и получило все сенсационные результаты в науке, технике, хозяйстве и даже в искусстве.

Нельзя, однако, забывать, что исследуемые элементы на высших уровнях иерархии также составляют системное единство. Соединяя их вместе, можно ожидать появления совершенно новых и неожиданных эффектов. Это направление исследований в последнее время притягивает к себе все большее внимание.

По характеру элементов системы разделяют на *физические* (их элементы — это явления, процессы, реальные предметы) и *символические* (элементы — символы: буквы, цифры, иные знаки).

Физические системы состоят из объектов материального характера. Особый интерес среди них для нас представляют системы, созданные человеком. Последние делятся на *технические системы* (приборы, здания и т. д.), *системы управления* типа «человек — машина», где одним из элементов выступает человек, цель которому устанавливает машина (например, оператор за пультом электростанции или машинист в электровагоносе) и *общественно-экономические системы* [7, с. 25].

Символические системы — это связанные между собой понятия. Примерами служат языки программирования, системы счисления, алгоритмы, системы бухгалтерского учета и др. Заметим, что символические системы служат моделями других сложных объектов.

Одним из важнейших понятий, относящихся к системам, является *структура*. Это некая постоянная составляющая системы, тесно связанная с ее организацией. Система считается расчлененной, если реализована ее декомпозиция, иначе говоря, если она представлена в виде множества отдельных элементов (подсистем). Такой комплекс элементов называют декомпозиционным множеством. При фиксированном декомпозиционном множестве структурой системы становится комплекс отношений между его элементами.



Мы будем принимать далее, что *структура* — множество взаимосвязей между элементами системы.

Другой неизменной составляющей системы служит ее *организация*. Она определяет стандарты поведения элементов системы в условиях их единства. Это сказывается на ограничении разнородности взаимодействия элементов декомпозиционного множества. Только с появлением организации системы возникает указанный выше синергический эффект: взаимодействуя, элементы начинают компенсировать слабые и усиливать свои сильные стороны. Определяя организацию, наблюдатель вначале устанавливает и описывает структуру.

Существует еще одна важная характеристика — *состояние системы*. Определяется оно множеством существенных для системы характеристик и их значениями.

Структура и организация системы — две противоположные и одновременно взаимодействующие на пользу системы характеристики. Первая из них способствует стабильности, вторая — адаптации. *Стабильность* служит сохранению системы как таковой в динамически меняющемся окружении, нейтрализуя попытки этого окружения изменить ее. *Адаптация* — процесс, направленный на достижение конкретного, обычно оптимального в некотором смысле состояния или поведения системы при наличии неопределенности и изменяющихся внешних условий. Адаптация для системы означает возможность целенаправленного и эластичного изменения собственной структуры с целью приспособления к окружающей среде и служит сохранению системы. Именно в ней содержатся предпосылки развития системы.

Еще один аспект классификации систем связан с понятием *окружения*. По способу взаимодействия со средой системы делятся на открытые и закрытые.

Закрытые, изолированные от среды, системы с необходимостью стремятся в сторону увеличения *энтропии*, которая является мерой неупорядоченности строения системы (разбилась тарелка, сгорели дрова в печи, стерлась автомобильная крышка — энтропия увеличилась). Возрастание энтропии означает постепенное выравнивание в системе всяческих различий. Падение внутренней организации приводит к снижению активности системы и прогрессирующей ее деградации, а разрушение структуры означает конец существования системы и слияние ее материального наполнения с окружением. Этот факт вначале был установлен в физике и получил название *закона возрастания энтропии*. Нет сомнения, что действует он и в общественно-экономических системах (деградировала наука, закрылась школа, нарушилась железнодорожная коммуникация между малыми населенными пунктами и районным городом — энтропия увеличилась).

4. Графы как структурные модели систем

С появлением системного мышления отношение к теории графов кардинально изменилось. Стучилось это потому, что создание системы требует построения ее структурной модели, а наилучшая структурная



модель любой системы — ориентированный граф. Благодаря этому разработанная для исследования графов абстрактная теория оказалась в центре многочисленных и разнообразных применений.

Создание структурной модели опирается на структурный анализ. Структурный анализ сложной системы предполагает в первую очередь выделение основных ее элементов. Их количество зависит от глубины декомпозиции, вытекающей из характера исследований, разрешающих возможностей и технического вооружения исследователя. После расчленения системы устанавливаются взаимосвязи между составляющими декомпозиционного множества внутри выбранных пар элементов. Поэтому появляются так называемые бинарные отношения, представляющие основу построения структуры. Составляют ее теперь абстрактные элементы подмножеств декомпозиционного множества и отношения между ними. Эта структура может корректироваться.

144

Такая схема применяется как при анализе уже существующих, так и в процессе конструирования совершенно новых систем. Это и есть *схема структурного моделирования*. Что же мы понимаем под абстрактными элементами подмножеств декомпозиционного множества?

Элементы конкретной системы всегда выразительно видны, поскольку овеществлены в некоторой субстанции. Ими могут являться материальные детали машины, люди, составляющие художественный ансамбль, или зависящие друг от друга предложения приказа руководителя. Субстанцию составляет все то, во что воплощены элементы сложного объекта. Связи между ними могут быть материальными (болты, соединяющие детали машины) или не иметь физического наполнения (симпатии и антипатии между членами художественного ансамбля).

Обычно в процессе структурного моделирования субстанцией элементов и их связей пренебрегают и анализируют структуру как «схему чистых отношений». Это означает абстрагирование от всех индивидуальных особенностей элементов, составляющих систему. При таком подходе от сложного объекта остается лишь его структурная тень, в которой даже элементы — только узлы, связывающие отношения. Вне структуры элемент просто не существует, так как не имеет иных индивидуальных признаков, кроме отражающих его место в схеме связей.

Может показаться, что при абстрагировании мы настолько далеко уходим от конкретной системы, что наши сужения о ней теряют всякое практическое значение. Однако это не так. Во-первых, от структуры зависит очень многое (бесконечное разнообразие материального мира обязано своим существованием модификациям отношений между весьма ограниченным числом атомов, составляющих химические элементы, то есть изменению структуры). Во-вторых, благодаря отдалению от свойств субстанции появляется возможность увидеть то, что внешне непохожие друг на друга сложные объекты имеют общие черты. Заметим, что именно на изоморфизме и гомоморфизме основано все моделирование. При изучении систем это открывает дорогу для применения аналогии, а при их конструировании — для использования стандартных блоков.

Так что же остается от сложного объекта после дематериализации системы, то есть после раскрытия ее структуры? То же, что осталось на



рисунке Эйлера после схематизации Кёнигсберга — граф. Итак, графы представляют собой натуральные структурные модели систем.

Далее мы ограничимся рассмотрением только систем, созданных человеком (здания, самолеты, ракеты, суда, технологические процессы, промышленные предприятия, различного рода институты, производственные системы и т. д.). Рассмотрим общие законы их построения.

Создание системы означает синтез различных ее компонентов. При этом часто существует возможность выбора проекта системы из ряда альтернативных вариантов. Конструирование реализуется так: формулируется цель, которой должна служить система; выдвигается замысел ее построения; выявляются, анализируются и конструируются подсистемы; подсистемы создаются и синтезируются в системную целостность. Поскольку подсистемы — сами системы, к ним также относится все сказанное выше о части и единстве. Ясно, что каждая система формируется из тех подсистем, которые мы в данном случае принимаем за элементы. В результате первого акта создания системы (декомпозиции) возникают подсистемы наиболее глубокого уровня (элементы). Второй акт (композиция) состоит в уложении элементов в подсистемы более высокого уровня и т. д. В конечном счете такая процедура ведет к появлению иерархической структуры системы в форме дерева. Что оно собой представляет?

Далее уместно будет использование бинарного отношения между элементами одного множества или различных множеств. *Бинарным отношением* R на множестве M называется подмножество R упорядоченных пар элементов, принадлежащих $M^2 = M \times M$, то есть *декартову произведению множества M на себя*. Декартово произведение M^2 содержит все возможные пары (x, y) , где x и y независимо пробегают все значения во множестве M . Подмножество R — часть множества M^2 , то есть $R \subseteq M^2$. Если $x \in M$ и $y \in M$, а данная упорядоченная пара (x, y) находится в бинарном отношении R , этот факт записывается как xRy .

Поскольку R является множеством упорядоченных пар, то

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R \subseteq M \times M, x, y \in M.$$

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает « A эквивалентно B », а знак \times — декартово произведение множества M на себя.

Бинарное отношение может устанавливать связи между элементами различных множеств $a \in A$ и $b \in B$. Тогда

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B, a \in A, b \in B.$$

Отношения могут быть представлены и с помощью ориентированных (направленных) графов $G(M, R)$. *Ориентированный (направленный) граф* — это множество *вершин* и множество *упорядоченных пар вершин*, называемых *дугами*. На плоскости он изображается с помощью точек (вершин), соединенных направленными отрезками (дугами) (рис. 12). Существуют и другие графы, однако нас далее будут интересовать именно эти. Вершины графа обозначаются обычно большими буквами с индексами, например P_0, P_1, \dots, P_m , а дуги — парами таких литер, размещенными в круглых скобках: $(P_0, P_1), (P_k, P_m)$ и т. д. Вершины часто нумеруют натуральными числами или их комбина-



циями. Дуга вида (P_k, P_m) свидетельствует о том, что она имеет начало в вершине P_k , а конец — в вершине P_m . Поэтому первую вершину называют *начальной*, а вторую — *конечной* (по отношению к дуге). Эту же дугу можно отметить символом (k, m) , используя только номера начальной и конечной вершин.

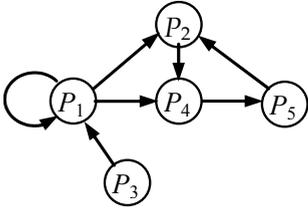


Рис. 12. Ориентированный граф

можно представить формулой $S = (M, R_g)$. Здесь R_g представляет собой отношение строгого порядка на множестве M . Запись $x \succ_{R_g} y$ означает, что x доминирует над y и содержит его в себе. Отношение строгого порядка, в свою очередь, означает, что для произвольных $x, y, z \in M$ выполняются два условия:

1) из того, что $x \succ_{R_g} y$ и $x \succ_{R_g} z$ следует, что y и z сравнимы;

2) в M существует в некотором смысле наибольший (доминирующий над всеми остальными) элемент x_0 . Множество M с отношением R_g , то есть пара $S = (M, R_g)$, называется *деревом*, а элемент x_0 — его *корнем*.

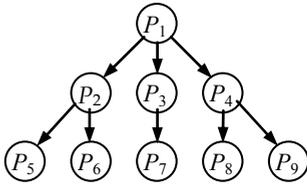


Рис. 13. Дерево

Отношение строгого порядка обозначим стрелкой, а элементы — точками (рис. 13). Тогда из первого условия вытекает, что в каждую вершину дерева, кроме x_0 (на рис. 13 это P_1), входит единственная стрелка, но из каждой вершины их может выходить несколько. Вершины, над которыми вершина x непосредственно доминирует, называются ее *соседством*. Соседство корня составляет *первый уровень* дерева. Соседства вершин первого уровня — *второй уровень* и т. д. Если речь идет о системе, моделью которой служит дерево, то корень символизирует всю систему как некую целостность взаимосвязанных элементов.

Из сказанного выше следует, что дерево является связанным графом без циклов и петель с $n - 1$ дугой при n вершинах. Оно содержит единственную вершину без входящих в нее дуг. Это корень дерева. У всех остальных вершин по одной предшествующей вершине и дуге. Вершины, не имеющие выходящих из них дуг, называют *листьями*. На рисунке 13 — это вершины $P_5 - P_9$.

Итак, выявляя иерархию создаваемой системы, в качестве структурной модели приходим к направленному графу типа дерева. А создавая систему, в ее составляющих и связях мы материализуем одновременно

На рисунке 12 приведен пример графа, содержащего пять вершин, обозначенных кружками, и семь дуг, обозначенных стрелками. В данном случае дуги, объединяющие вершины P_2, P_4 и P_5 , создают так называемый *цикл*, а дуга, соединяющая вершину P_1 с самой собой, — *петлю*.

Широко распространенная структурная модель создаваемых человеком систем — *дерево*. *Дерево* — это граф, который



некоторую математическую модель. Модели в виде графов имеют многочисленные применения. Среди них можно назвать, например, модели коммуникационных или электрических сетей. Это могут также быть модели комплексов работ или упорядочения решаемых задач.

5. Операционные системы и их структурные модели

В дальнейшем нас будут интересовать системы, существенную роль в которых играют отношения причинно-следственного характера. Рассматриваемые во времени, они приводят к представлению о движении как отдельных компонентов, так и системы в целом. Наибольший интерес среди таких систем вызывают операционные системы.

Операцией мы называем упорядоченное множество взаимосвязанных и обеспеченных необходимыми ресурсами действий, направленных на достижение цели. Предназначенными для этого ресурсами располагают люди, выполняющие операцию. В промышленности к ресурсам относят основные и оборотные фонды и средства, станки, материалы, энергию, транспорт, работников, участвующих в выполнении операции и т. д.

Какова же структура системы, предназначенной для выполнения операции? Одна часть коллектива, реализующего операцию, составляет орган управления, другая — входит в объект управления. *Объект управления* — условно выделенная часть системы, которая нуждается в получении управляющих воздействий для достижения требуемого состояния. Он реализует конкретные действия, необходимые для проведения операции (рис. 14). Совместно с органом управления объект составляет систему, назначением которой является выполнение операции. В случае реализации повторяющихся во времени целей ее называют *производственной системой, или организацией*. В каждом случае мы имеем в виду сознательно координируемое относительно стабильное образование, которое функционирует для достижения общей цели.



Рис. 14. Структура операционной системы



Таким путем мы приходим к организованной системе, в которой протекают процессы управления. Поскольку это открытая система, она одновременно выделена из окружающей среды и тесно с нею связана. Связи, через которые среда воздействует на систему, называются *входами в систему*. Связи, через которые система воздействует на среду, — *выходами*. Иначе говоря, вход — это место приложения некоторого воздействия, а выход — место, в котором наблюдается эффект, вызванный этим воздействием.

В зависимости от достигаемой цели в качестве операционной системы можно рассматривать научно-исследовательский институт, учебное заведение, промышленное или сельскохозяйственное предприятие, воинское подразделение, регион вместе с его региональными властями и самоуправлением и т. д. Все это составляет своеобразную систему управления, созданную с целью реализации операции. Сама же операция направлена на выполнение программы достижения выдвинутой ранее цели.

После разделения производственной системы на две части в рассмотрение входят орган управления (управляющая подсистема) и объект управления (управляемая подсистема).

Естественно, что орган и объект управления обмениваются информацией. Этой цели служат каналы связи. Все их можно разделить на две группы. К первой группе мы отнесем те, благодаря которым из объекта на информационный вход органа управления передается информация о положении дел внутри управляемой подсистемы. Это может быть информация как качественного характера, так и текущие значения важнейших показателей, характеризующих состояние объекта управления. Вторую группу составляют каналы, по которым управляющая подсистема передает на вход объекта свои командные предписания.

Вместе с объектом и органом управления эти каналы образуют замкнутую информационную цепь с так называемой обратной связью. *Обратная связь* — способ соединения элементов системы управления, обеспечивающий связь между выходом какого-либо элемента и входом того же самого элемента. Указанная связь осуществляется непосредственно либо через другие элементы системы. Благодаря этому управляющая подсистема реализует непрерывное управление своим объектом с учетом его текущего состояния. Принцип реализации управления с помощью обратной связи универсален. Он лежит в основе функционирования как систем автоматического регулирования, так и сложных общественно-экономических систем.

В каждый момент времени состояние объекта зависит от его предшествующих состояний, от возмущений, вызванных действием среды и внутренними причинами, а также от управляющих воздействий органа управления. Состояние же органа управления зависит от состояния объекта, степени достижения цели, которой служит вся система, и внешней информации, возникающей на его информационном входе.

При более пристальном рассмотрении операционной системы внутри органа управления можно заметить выраженную иерархию. *Иерархия управления* — порядок подчиненности взаимосвязанных уровней системы управления. Она создается контурами, реализующими функции управления: регулирования, организации и планирования [8,



с. 71]. О связи между графами вида дерева и иерархией систем мы говорили выше. Рассмотрим теперь модели горизонтальной структуры.

Действительно, кроме иерархической системы связей мы наблюдаем и непосредственные отношения между элементами одного и того же уровня. Они создают параллельные структуры. При описании взаимодействия системы со средой мы воспользуемся определенными выше понятиями входа, выхода и состояния системы.

Воздействие окружения на систему характеризуется входными параметрами, которые мы называем просто входами. Множество входов можно представить вектором $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_s)$. На выходе появляются выходные параметры. Преобразование входных параметров в выходные определяется алгоритмом реализуемой операции. Множество выходных параметров образует вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_s)$.

Система преобразует входы в выходы согласно отношению $u_i R_j y_j$, где $u_i \in \mathbf{u}$, $y_j \in \mathbf{y}$. Итак, мы приходим к структурной модели подсистемы «вход – выход» в виде тройки $S = (\mathbf{u}, \mathbf{y}, R)$, а говоря иначе – несвязного ориентированного графа. Этот вывод справедлив в двух случаях:

- 1) когда система может находиться только в одном состоянии;
- 2) когда входные параметры совпадают с параметрами состояния.

В общем случае входы системы влияют только на параметры ее состояния $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с помощью отношений

$$u_i R_1 x_j \Leftrightarrow (u_i, x_j) \in R_1 \subseteq \mathbf{u} \times \mathbf{x}.$$

Выход системы определяется двучленным отношением между параметрами: вход (состояние) и выход:

$$(u_i, x_j) R_2 y_k \Leftrightarrow ((u_i, x_j), y_k) \in R_2, \text{ где } R_2 \subseteq (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y}.$$

Составляющие структуры моделей таких систем – пятерки вида $S = (u, x, y, R_1, R_2)$, которые считаются системами несвязных графов.

С точки зрения системной целостности вход можно трактовать как причину, а выход – как следствие. В биологических системах вход называют стимулом, а выход – реакцией. Технические системы описываются в понятиях «вход – состояние – выход». Для организационных систем типа «человек – машина» важнейшими понятиями являются цели и задания. Результаты выполнения заданий и достижения целей оцениваются в категориях выхода или состояния. Поскольку состояния и выходы можно изменять с помощью входов, появляется проблема создания таких входов, для которых выходы представляют решение задачи.

Как подчеркивалось выше, *закрытые системы* окружения не имеют (или его влиянием на систему можно пренебречь). *Открытые системы* испытывают значительное влияние своего окружения. Если изменение состояния системы (то есть ее существенных свойств) описывается решением дифференциального уравнения

$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, где $\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ и $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$, то система закрытая. Если же ее описание имеет

вид $\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}^T(t)$, где $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times m}$, а вектор $\mathbf{u} = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$ характеризует влияние окружения, то система считается открытой.



Статическая система имеет только одно состояние, *динамическая* — множество переходящих с течением времени друг в друга состояний. *Поведением системы* мы называем изменение ее состояния, в результате которого появляется некоторый результат. А значит, поведение системы непосредственно связано с достижением цели или реализацией задачи. Термин «поведение» применяется для операционных систем и систем типа «человек — машина». Их поведение определяется характером операции, которую реализует система. При рассмотрении технических систем мы говорим только о происходящих в системе процессах, но не о их поведении.

Таким образом, выполняя операции, системы реализуют некоторые типы поведения. А значит, реализация операции — это изменение состояния самой системы и окружения. Вспомним, что структура системы представляет собой неизменный ее элемент. Отсюда следует, что отвечающий ей граф (или система графов) при всех возможных способах поведения системы является инвариантным объектом. Поскольку даже в открытых системах матрицы **A** и **B** остаются неизменными, можно утверждать, что именно они характеризуют структуру системы. Их же наполнение зависит от организации самой системы. Из этого вытекает, что матрицы **A** и **B** непосредственно связаны со структурными моделями в форме графов.

Заключение

Итак, благодаря абстрактным объектам в форме графов возникла возможность создания и совершенствования реально существующих систем. А, как известно, естественным способом оценки правильности и полезности абстрактной схемы является возможность придания ей с помощью каких-либо средств материального овеществления.

Список литературы

1. Глазунов Ю. Т. Вариационные методы. М.; Ижевск, 2006.
2. Лависс Э. Очерки по истории Пруссии. М., 1915.
3. Руд К. Гильберт. М., 1977.
4. Prager W. Introductory remarks // Quarterly of Applied Mathematics. 1972. Vol. 30, № 1. P. 1–9.
5. Bertalanffy L. von. Ogólna teoria systemów. Podstawy, rozwój, zastosowania. Warszawa, 1984.
6. Николис Г. Познание сложного. Введение. М., 1990.
7. Glazunow J. Logika opracowania regionalnych programów rozwojowych. Elbląg, 2002.
8. Glazunow J. Cel, operacja oraz układ operacyjny w świetle podejścia systemowego // Acta Elbingensia. T. 4: Elbląska Uczelnia Humanistyczno-Ekonomiczna. Elbląg, 2006. S. 343–354.

Об авторе

Юрий Трофимович Глазунов — д-р техн. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: lab109@mathd.albertina.ru.

Author

Professor Yuriy Glazunov — I. Kant Baltic Federal University, e-mail: lab109@mathd.albertina.ru.